

**Grupo de Matemática**

**PLANIFICAÇÃO**

**MATEMÁTICA A**

**11º Ano**

**Curso de Ciências Socioeconómicas**

**Ensino Recorrente de Nível Secundário**

**Ano Letivo: 2013/2014**



 **Grupo de Matemática**

**Planificação de Matemática A – 11º ano**

**Ano letivo 2013/14**

**LONGO PRAZO**

**Distribuição dos conteúdos programáticos por tempos letivos**

|  |  |
| --- | --- |
| Temas | Aulas previstas (Tempos de 45 min) |
| Módulo 4 – Geometria no Plano e no Espaço II  | 50 |
|  Módulo 5 – Funções racionais e com radicais. Taxa de variação e Derivadas | 46 |
|  Módulo 6 – Susseções Reais | 36 |
|  | **122** |

**Distribuição dos conteúdos programáticos por módulos**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Módulos | Período | Aulas previstas |
| **Módulo 4- Geometria no Plano e no Espaço II*** Problemas envolvendo triângulos.
* Círculo trigonométrico e funções seno, co-seno e tangente.
* Produto escalar de dois vectores e aplicações.
* Intersecção, paralelismo e perpendicularidade de rectas e planos.
* Programação linear (breve introdução).
 | 1º | 50 tempos de 45min |
| **Módulo 5 – Funções racionais e com radicais. Taxa de variação e Derivadas*** Problemas envolvendo funções ou taxa de variação.
* Propriedades das funções do tipo *f(x)=a+b/(cx+d).*
* Aproximação experimental da noção de limite.
* Taxa de variação e derivadas em casos simples.
* Operações com funções.
* Composição e inversão de funções.
 | 1º / 2º | 46 tempos de 45min |
| **Módulo 6 - Susseções Reais*** Definição e propriedades. Exemplos (o caso das progressões).
* Sucessão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$e primeira definição de *e.*
* Limites: infinitamente grandes e infinitamente pequenos.
* Limites reais e convergência.
 | 2º / 3º  |   36 tempos de 45min |

**Distribuição de atividades por tempos escolares de 45min**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Módulo 4** | **Módulo 5** | **Módulo 6** | **Total** |
| Tratamento dos conteúdos programáticos | 42 | 38 | 30 | **110** |
| AvaliaçãoAtividades de Recuperação |  8 | 8 | 6 | **22** |
| Total | **50** | **46** | **36** | **132** |

1º Período: 54 tempos letivos de 45m

2º Período: 50 tempos letivos de 45m

3º Período: 28 tempos letivos de 45m

**MÉdio PRAZO**

**Módulo 4- Geometria no Plano e no Espaço II**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Conteúdos** | **Objetivos de aprendizagem** | **Competências visadas** | **Orientações metodológicas** | **Avaliação** | **Tempos****Letivos** |
| * Resolução de problemas que envolvam triângulos.
* Ângulo e arco generalizados.
* Funções seno, co-seno e tangente.
* Expressão geral das amplitudes dos ângulos com o mesmo seno, co-seno ou tangente.
* Equações trigonométricas elementares.
* Produto escalar de dois vectores no plano e no espaço.
* Perpendicularidade de vectores e de rectas; equação cartesiana do plano definido por um ponto e o vector normal.
* Intersecção de planos e interpretação geométrica.
* Paralelismo e perpendicularidade de rectas e planos.
* Programação linear - breve introdução.
* Domínios planos - interpretação geométrica de condições
 | * apropriar alguns conceitos e técnicas associadas para serem utilizados como ”ferramentas” na resolução de problemas que envolvam razões trigonométricas do ângulo agudo, compreensão e intervenção sobre fenómenos periódicos e seu desenvolvimento;
* construir modelos (e maquetes) apropriadas, úteis à resolução dos problemas e à generalização das noções de ângulo e arco, bem como de conceitos como o de radiano, por exemplo, e as definições de seno, co-seno e tangente de um número real;
* identificar as vantagens do uso de referenciais e círculo trigonométrico;
* resolver problemas dentro de situações que exijam a resolução de equações trigonométricas simples, a compreensão das características das funções circulares (simetria, paridade e periodicidade);
* escrever condições definidoras de conjuntos de pontos e lugares geométricos, agora com o apoio acrescido da definição e propriedades do produto escalar de dois vectores;
* resolver problemas de geometria no plano e no espaço, por vários processos e perspectivas de abordagem (sintética, analítica e vectorial).
* determinar equações e inequações que representem rectas, planos e domínios;
* resolver problemas de programação linear;
* comunicar, oralmente e por escrito, aspectos dos processos de trabalho e crítica dos resultados.
 | * a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos para fenómenos reais utilizando trigonometria básica e conceitos trigonométricos generalizados;
* a capacidade de apreciar a geometria no mundo real e o reconhecimento e a utilização de ideias geométricas em diversas situações e na comunicação;
* a aptidão para utilizar a visualização, a representação e o raciocínio espacial na análise de situações problemáticas realistas e na resolução de problemas;
* a aptidão para formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio espacial, explicitando-os em linguagem corrente;
* a aptidão para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas e relacioná-las com condições que as podem definir em referenciais o.n. ;
* .a aptidão para descrever a realidade, enfrentar situações e resolver problemas utilizando diversos sistemas matemáticos (relações entre elementos do espaço e propriedades, coordenadas e vectores.)
* a aptidão para fazer e investigar matemática recorrendo à modelação com uso das tecnologias;
* a aptidão para elaborar modelos geométricos e gráficos para situações de planeamento de produção ou outras que exijam a procura de valores óptimos e apoio às tomadas de decisão;
* a capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados;
* a capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, …
* a capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas.
 | * Devem propor-se aos alunos problemas variados ligados a situações concretas, que permitam recordar e aplicar métodos trigonométricos (problemas ligados a sólidos, a moldes, à navegação, à topografia, históricos,...) bem como aperceberem-se da importância da trigonometria para as várias Ciências. Os alunos devem ser solicitados a deduzir as razões trigonométricas em ,  e  radianos por se considerar que é importante que se conheçam alguns valores exatos das funções trigonométricas, nomeadamente para que mais tarde possam confirmar pontos do traçado de gráficos de funções trigonométricas. Isto não significa que se trabalhe preferencialmente com estes valores, até porque se usa a calculadora.
* **A compreensão do círculo trigonométrico é fundamental**. A generalização das noções é intuída e sistematizada a partir de atividades que considerem movimentos circulares pretendendo-se, agora, que, ao resolver problemas, os alunos recordem os conceitos básicos de trigonometria do ângulo agudo e se enfrentem situações novas em que a generalização das noções de ângulo e arco, bem como das razões trigonométricas, apareçam como necessárias e intuíreis. Pretende-se que os alunos aprendam os conceitos de função periódica e de funções trigonométricas como modelos matemáticos adequados a responder a problemas. É necessário que se apercebam da diferença em trabalhar por exemplo com *sin* 1 em graus e radianos de modo a ter sempre presente em que modo está a calculadora e interpretar convenientemente os resultados. Recorrendo ao círculo trigonométrico as relações entre as funções circulares de , , , ,  e  aparecem naturalmente aos alunos mobilizando unicamente a compreensão dos conceitos já adquiridos. Não tem pois sentido que lhes sejam propostos exercícios rotineiros em que estas relações intervenham. Não vale a pena sequer privilegiar estes valores. Podem propor-se bons problemas que lhes permitam desenvolver a aptidão para reconhecer ou analisar

 propriedades de figuras geométricas. É importante verificar que se mantêm as relações: que devem ser usadas na determinação de uma função trigonométrica, conhecida outra.\* Recorrendo à compreensão, sempre ligada à interpretação do círculo trigonométrico, os alunos desenvolvem a aptidão para mobilizar os conceitos já aprendidos com vista à resolução de condições simples. Assim as técnicas de resolução de equações não passam por listas exaustivas de fórmulas. As alunos desenvolvem a sua capacidade de transferir conhecimentos para novas situações (sempre ligadas à compreensão do círculo trigonométrico).Pode ser feita uma breve referência aos gráficos das funções trigonométricas podendo utilizar-se uma atividade de movimento circular que permita, por exemplo, passar do círculo trigonométrico para os pontos (*x, sinx*) do plano cartesiano.* Podem propor-se algumas situações do âmbito da Física como forma de recordar e ampliar alguns aspetos do cálculo vetorial, designadamente, o trabalho de uma força. Como atividades de aplicação do conceito estudado, aparecem a determinação do ângulo de duas retas e do declive de uma reta como tangente da inclinação no caso da equação reduzida da reta no plano. Também como aplicação importante deste novo conceito, os alunos encontrarão a condição de perpendicularidade de vetores bem como novas formas de definir conjuntos seus conhecidos (no plano: mediatriz, circunferência ou reta tangente a uma circunferência num ponto dado; no espaço: plano mediador e superfície esférica). Poderá aparecer, ainda, como aplicação do conceito de produto escalar de dois vetores a dedução da fórmula do desenvolvimento de *cos (x-y).*
* Recorda-se novamente que se dá a maior ênfase à análise e interpretação de figuras quer planas quer tridimensionais pois, o aluno, para resolver problemas da vida corrente ou relacionados com áreas de engenharia, arquitetura,... precisa de usar intuição e raciocínios geométricos. Ao professor compete assegurar que, neste estudo da Geometria, o aluno não se limita à "manipulação" de condições desligadas de situações concretas, sem qualquer esforço de interpretação. A aprendizagem dos novos conceitos aparece ligada à resolução de problemas como prolongamento da geometria estudada no ano anterior (agora o aluno poderá justificar propriedades das figuras usando as suas representações em coordenadas).
 | Os alunos serão avaliados ao longo deste módulo nos termos dos Critérios de Avaliação do Departamento. | **50** |

**Módulo 5 – Funções racionais e com radicais. Taxa de variação e Derivadas**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Conteúdos** | **Objetivos de aprendizagem** | **Competências visadas** | **Orientações metodológicas** | **Avaliação** | **Tempos****Letivos** |
| * Resolução de problemas envolvendo funções ou taxa de variação.
* Estudo intuitivo das propriedades das funções e dos seus gráficos, tanto a partir de um gráfico particular como usando calculadora gráfica, para a seguinte classe de funções: *f* (*x*) *a* *b*

*cx* *d** Conceito intuitivo de limite, de ∞e de −∞.
* Noção de taxa média de variação; cálculo da taxa média de variação.
* Interpretação geométrica da taxa de variação; definição de derivada.
* Determinação da derivada em casos simples: função afim, funções polinomiais do 2º e 3º grau, função racional do 1º grau, função módulo.
* Funções definidas por dois ou mais ramos (cujo domínio é um intervalo ou união de intervalos).
* Soma, diferença, produto, quociente e composição de funções no contexto do estudo de funções racionais, envolvendo polinómios do 2º e 3º grau.
* Inversa de uma função. Funções com radicais quadráticos ou cúbicos.
* Operações com radicais quadráticos e cúbicos e com potências de expoente fraccionário.
* Simplificações de expressões com radicais (não incluindo a racionalização).
 | * elaborar modelos para situações da realidade e de outras ciências, utilizando diversos tipos de funções;
* usar modelos de regressão (com recurso à calculadora) na resoluçao de problemas;
* fazer o estudo de funções (domínio, extremos se existirem, zeros, intervalos de monotonia, assimptotas) descrevendo e interpretando no contexto da situação;
* reconhecer que o mesmo tipo de função pode ser um modelo de diferentes situações realistas;
* traduzir representações descritas por tabelas ou gráficos;
* analisar os efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos de funções;
* usar cenários visuais gerados pela calculadora para ilustrar conceitos matemáticos;
* utilizar a calculadora para realizar simulações e experiências matemátícas com elaboração e análise de conjecturas;
* abordar, de forma experimental, o conceito de limite (a formalizar no 12º ano) e utilizá-lo de forma intuitiva para interpretar situações.
* usar manipulações algébricas para resolver equações e inequações, nvolvendo polinómios,

expressões racionais e irracionais;􀂃usar métodos gráficos para resolver condições cuja resolução com métodos algébricos nãoesteja ao alcance dos estudantes;􀂃compreender e utilizar a soma,diferença, produto, quociente e composição de funções nocontexto do estudo de funções racionais;* compreender e utilizar o conceito de função inversa;
* utilizar linguagem matemática adequada na elaboração, análise e justificação de conjecturas ou na comunicação de conclusões.
 | * a aptidão para fazer e investigar matemática recorrendo à modelação com uso das tecnologias;
* a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos para fenómenos reais utilizando funções racionais e com radicais;
* a capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados;
* a capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, …
* a capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas;
* a capacidade para resolver algébrica e graficamente equações e inequações envolvendo trabalho com polinómios e com expressões racionais e com radicais;
* a capacidade de utilizar o conceito de taxa média de variação e de taxa de variação/derivada para tirar conclusões sobre crescimento e rapidez de crescimento de funções na resolução de problemas em contexto de Matemática, Física, Economia e de outras ciências.
 | \* As indicações metodológicas são semelhantes às dadas no Tema II do 10º ano.Sugerem-se as seguintes propriedades:Domínio, contradomínio, pontos notáveis, monotonia, continuidade, extremos (relativos e absolutos), simetrias em relação ao eixo dos YY e à origem, assimptotas, limites nos ramos infinitos.Afigura-se necessário propor problemas envolvendo as funções anteriores e as estudadas no 10º ano, tanto sob os aspetos analíticos como numéricos e gráficos. A resolução de equações e inequações fracionárias aparecem num contexto de resolução de problemas.\* O conceito de limite, a ser formalizado mais tarde, deve ser utilizado de forma intuitiva (incluindo o de limite lateral esquerdo e direito). Neste contexto devem ser introduzidos os símbolos  e , devendo chamar-se a atenção para o facto de não serem números reais, mas apenas símbolos com um significado preciso.Este conceito deve ser abordado de uma forma experimental.\* Retomando os conhecimentos de polinómios, o aluno deverá ser capaz de transformar expressões como: em  ou  em e observar que, do ponto de vista computacional, normalmente se ganha precisão, pois se efetua um número mais reduzido de operações. Por outro lado, esta simplificação permite que se estude o comportamento no infinito sem necessidade de recorrer ao gráfico. Contudo, os alunos devem efetuar este tipo de transformações e simultaneamente confirmarem pelo gráfico da função, antes de concluírem sobre o limite no infinito de uma função racional.\* No caso da função inversa os alunos precisam de analisar os casos em que será possível inverter uma função (poderá ser introduzida a noção de injetividade, apenas como noção auxiliar) e devem constatar a relação entre os gráficos de uma função e da sua inversa. Será necessário introduzir a noção de raiz índice n. Tal deverá ser feito de forma algébrica. Só depois se falará na função inversa da função potência. Grau de dificuldade a não ultrapassar: , .\* Uma aplicação das operações com radicais: obtenção da equação de uma elipse a partir da sua propriedade focal (dados os focos).\* Para calcular derivadas de funções simples, não é necessário invocar questões especiais sobre limites, basta recorrer à noção intuitiva. Poderemos pensar no intervalo  ou  e na função  e  que, para , vale *m* (qualquer que seja a distância .Do mesmo modo, se pode pensar para a derivada de outras funções. Por exemplo, para a função , a taxa média de variação no intervalo  é dada por: que tende a ser , quando *h* tende a ser 0. Esta abordagem está sempre associada a interpretação geométrica para a taxa média de variação e para a derivada (declives de secantes e tangentes às curvas das funções).\* Podem ser propostos alguns problemas simples que envolvam derivadas num contexto de aplicações.\* Constate-se que quando as tangentes à curva de uma função em todos os pontos de abcissas de um intervalo aberto do seu domínio têm declives positivos (correspondente à derivada da função ser positiva em todos os pontos do intervalo aberto) a função é crescente nesse intervalo. De modo análogo para os restantes casos.Lembre-se se opta por considerar que uma função é derivável num ponto *a* do seu domínio quando o valor da derivada é real: .\* Não se pretende que os argumentos geométricos sejam apresentados como prova. Alguns resultados virão a ser demonstrados mais tarde.\* Os casos  e  são bons e simples contraexemplos para que os alunos compreendam que há funções que têm derivada nula num ponto sem que nele haja extremo e que há funções com extremo que não têm derivada real no ponto em que tal acontece. | Os alunos serão avaliados ao longo deste módulo nos termos dos Critérios de Avaliação do Departamento. | **46** |

**Módulo 6 - Susseções Reais**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Conteúdos** | **Objetivos de aprendizagem** | **Competências visadas** | **Orientações metodológicas** | **Avaliação** | **Tempos Letivos** |
| **Sucessões*** Definição e diferentes formas de representação.
* Estudo de propriedades: monotonia e limitação.
* Progressões aritméticas e geométricas: termo geral e soma de n termos consecutivos.
* Estudo intuitivo da sucessão de termo geral $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ num contexto de modelação matemática; primeira definição do número *e*.

**Limites*** Infinitamente grandes e infinitamente pequenos.
* Limites de sucessões e convergência.
* Noção de limite real.
* A convergência das sucessões monótonas e limitadas .
* Problemas de limites com progressões .
 | * reconhecer e dar exemplos de situações em que os modelos de sucessões sejam adequados;
* utilizar, sempre que possível, os conhecimentos já adquiridos de funções reais de variável real;
* usar a calculadora gráfica, ou computadores, (folha de cálculo) para trabalhar numérica e graficamente com sucessões;
* reconhecer e dar exemplos de situações em que os modelos de progressões aritméticas ou geométricas sejam adequados;
* distinguir crescimento linear de crescimento exponencial;
* investigar propriedades de progressões aritméticas e geométricas, numérica, gráfica e analiticamente;
* compreender e utilizar as noções de sucessão monótona e de sucessão limitada;
* compreender e utilizar as noções de infinitamente grande, infinitamente pequeno e de limite de uma sucessão;
* resolver problemas usando propriedades de progressões aritméticas e de progressões geométricas;
* validar conjecturas; fazer raciocínios demonstrativos usando métodos adequados
* usar noções de lógica indispensáveis à clarificação dos conceitos.
 | * a aptidão para representar relações funcionais de vários modos e passar de uns tipos de representação para outros, usando regras verbais, tabelas, gráficos e expressões algébricas e recorrendo, nomeadamente, à tecnologia gráfica;
* a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos para fenómenos reais utilizando modelos discretos;
* a capacidade de identificar padrões e regularidades, em contextos numéricos e geométricos, e para formular generalizações em situações diversas;
* a capacidade para procurar exemplos e contra exemplos esclarecedores dos conceitos a abordar, incentivando o gosto para investigar propriedades;
* a capacidade para passar da escrita em linguagem corrente para linguagem simbólica dos diversos conceitos que devem ser aplicados em exercícios simples;
* a capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, …
* a capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas.
 | \* As sucessões aparecem como uma forma de organizar possíveis resoluções para situações problemáticas que são apresentadas, com base em aspetos da realidade (social) e em aspetos do estudo das diversas ciências (Matemática incluída). O estudo das sucessões pode e deve servir para evidenciar conexões entre a Matemática e as outras disciplinas: a introdução do conceito de sucessão e das suas propriedades pode ser feita propondo vários problemas.Exemplos sugestivos podem versar assuntos diversos: da geometria – por exemplo, comprimento da espiral construída a partir de quartos de circunferências; da economia – por exemplo, problemas com empréstimos ou depósitos bancários com juros sobre um capital constante (ou variável); da biologia – por exemplo, cálculo do número de elementos de uma população considerado um determinado modo de reprodução de cada elemento... O estudo das sucessões como funções de variável natural deve ser feito só depois de terem sido construídos vários exemplos modelo. Mas a escrita de expressões para os termos gerais das sucessões deve ser procurada como forma de representar as situações que se vão descrevendo. Do mesmo modo se podem introduzir as noções de termo, de ordem, ou até de razão, etc. O estudo da monotonia, minorantes, majorantes, etc., pode ser feito à medida que vão aparecendo como aspetos a considerar durante a resolução dos diferentes problemas. Do mesmo modo, podem ser abordadas as propriedades de certas sucessões (progressões). Estes problemas podem ainda servir para introduzir a definição por recorrência, para casos simples.\* Os alunos podem utilizar livremente a calculadora para procurar responder aos problemas que lhes são propostos e devem procurar formas próprias de organização e expressão para a modelação das situações. O professor deve explorar o uso da calculadora e ajudar a construir tabelas, a desenhar e a interpretar gráficos. Só depois de serem experimentadas variadas redações, são introduzidas as redações simbólicas consagradas. As redações simbólicas serão testadas como exercícios rápidos.\* Depois de se terem introduzido as noções de sucessão como função de variável natural, de ordem, de termo, etc., podem apresentar-se exemplos de sucessões definidas pelo seu termo geral e, utilizando a calculadora gráfica, através de cálculos e representações gráficas de sequências de termos, chegar aos conceitos de infinitamente grande, de infinitamente pequeno e de limite de uma sucessão. Cada definição deve ser suportada por exemplos e contraexemplos que esclareçam as ideias imediatas e corrijam eventuais conceções alternativas e erradas. É bom que os alunos utilizem conhecimentos já adquiridos sobre algumas funções reais de variável real e os transfiram com as devidas cautelas para as sucessões. É importante que se aproveitem momentos como este para obrigar os alunos a refletir (pedindo-lhes contraexemplos em que os recíprocos nem sempre são válidos).\* As definições são estabelecidas em linguagem corrente seguindo as conclusões a tirar de cada exemplo e contraexemplo. Após cada redação em linguagem corrente deve ser estabelecida uma redação em simbologia matemática e devem então ser aplicados exercícios rápidos em que as definições simbólicas são testadas. | Os alunos serão avaliados ao longo deste módulo nos termos dos Critérios de Avaliação do Departamento. | **36** |