

**Grupo de Matemática**

**PLANIFICAÇÃO**

**MATEMÁTICA A**

**11º Ano**

**Ano Letivo: 2013/2014**



**Grupo de Matemática**

**Planificação de Matemática A – 11º ano**

**Ano letivo 2013/14**

**LONGO PRAZO**

**Distribuição dos conteúdos programáticos por tempos letivos**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Aulas previstas |
| Trigonometria | 28 |
| Produto escalar / Geometria no Espaço | 26 |
| Programação linear e Domínios planos | 08 |
| Funções racionais e com radicais | 30 |
| Derivadas | 18 |
| Sucessões | 22 |
|  | **132** |

**Distribuição dos conteúdos programáticos por período letivo**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Período | Aulas previstas |
| Trigonometria  Produto escalar / Geometria no Espaço | 1º | 28  26 |
| Programação linear e Domínios planos  Funções racionais e com radicais  Derivadas | 2º | 08  30  18 |
| Sucessões | 3º | 22 |

**Distribuição de atividades, por período letivo e por tempos escolares**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1º Período** | **2º Período** | **3º Período** | **Total** |
| Apresentação | 02 | - | - | 02 |
| Tratamento dos conteúdos programáticos | 54 | 56 | 22 | 132 |
| Teste diagnóstico  Testes escritos e correções  Atividades de remediação  Trabalhos na aula | 20 | 14 | 12 | 46 |
| Auto avaliação | 02 | 02 | 02 | 06 |
|  | **78** | **72** | **36** | **186** |

**MÉDIO PRAZO**

**TEMA I – Geometria no Plano e no Espaço II**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **CONTEÚDOS** | **COMPETÊNCIAS VISADAS** | **OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM** | **ORIENTAÇÕES METODOLÓGICAS** | **AVALIAÇÃO** | **Nº DE AULAS** |
| \* Definição das razões trigonométricas de um ângulo agudo. Uso da calculadora.  \* Estabelecimento das razões trigonométricas dos ângulos de 30º,45º e 60º.  \* Estabelecimento de fórmulas trigonométricas.  \* Resolução de problemas envolvendo triângulos.  **\*** Ângulo e arco generalizado:  - Radiano.  - Expressão geral das amplitudes dos ângulos com os mesmos lados, em graus e radianos.  \* Funções seno, co-seno e tangente: definição; variação (estudo no circulo trigonométrico).  \* Relações entre as funções circulares de α e de π/2 - α, π/2 + α, π - α, π + α e - α.  \* Comparação de senos e de co-senos de números reais.  \* Expressão geral das amplitudes dos ângulos com o mesmo seno, co-seno ou tangente.  Equações trigonométricas elementares.  \* Vetores no plano e no espaço (revisão).  \* Produto escalar de dois vetores no plano e no espaço:  - Definição e propriedades.  \* Expressão do produto escalar nas coordenadas dos vetores em referencial ortonormado.  \* Ângulo de duas retas; inclinação de uma reta; declive como tangente da inclinação no caso da equação reduzida da reta no plano.  \* Perpendicularidade de vetores e retas.  \* Equação cartesiana do plano definido por um ponto e o vetor normal.  \* Intersecção de planos e interpretação geométrica:  - Resolução de sistemas  - Equações cartesianas da reta no espaço.  \* Paralelismo e perpendicularidade de retas e planos (interpretação vetorial).  \* Programação Linear: breve introdução  \* Domínios planos – interpretação geométrica de condições. | \* Resolver problemas nos domínios da Matemática e da Física.  \* Interpretar e criticar resultados no contexto do problema.  \* Exprimir o mesmo conceito em diversas formas ou linguagens.  \* Operar com expressões.  \* Resolver equações.  \* Conhecer personalidades e factos marcantes da História da Matemática e relacioná-los com momentos históricos de relevância cultural ou social.  \* Utilizar vetores no estudo do plano e do espaço, em referencial ortonormado.  \* Resolução de problemas  \* Resolver problemas de incidência, paralelismo e perpendicularidade no plano e no espaço, por via intuitiva e analítica.  \* Expor os raciocínios utilizados na resolução de problemas.  \* Resolução de problemas de Economia. | \* Identificar as razões trigonométricas de um ângulo agudo.  \* Conhecer e utilizar quando necessário os valores exatos das razões trigonométricas dos ângulos de 30º, 45º e 60º.  \* Relacionar e calcular as medidas dos ângulos e dos lados de triângulos retângulos.  \* Resolver problemas que envolvam o cálculo de um elemento de um triângulo.  - Utilizar as fórmulas trigono-métricas na verificação de identidades.  \* Converter radianos em graus e reciprocamente.  \* Identificar as razões trigonométricas no círculo trigonométrico.  \* Operar com expressões trigonométricas, relacionando as funções circulares de α e de π/2 - α, π/2 + α, π - α, π + α e - α.  \* Resolver equações trigonométricas simples.  \* Utilizar a calculadora gráfica de forma crítica.  \* Escrever as coordenadas de um vetor no plano e no espaço.  \* Escrever um vetor como diferença de dois pontos.  \*Calcular a norma de um vetor.  \* Efetuar o produto escalar de vetores (utilizando a definição ou as propriedades), no plano e no espaço, num qualquer referencial ou num referencial ortonormado.  \* Determinar o ângulo de dois vetores, no plano e no espaço.  \* Calcular a partir do conceito de produto escalar:  - o ângulo de duas retas;  - a inclinação de uma reta.  \* Justificar propriedades de figuras geométricas (utilizando o produto escalar.  \* Aplicar o produto escalar na resolução de problemas que exijam a análise e interpretação de figuras geométricas a duas ou três dimensões.  \* Determinar:  - A equação cartesiana do plano definido por um ponto e o vetor normal;  - Equações de retas no espaço.  \* Resolver sistemas que envolvam a intersecção:  - de dois planos;  - de três planos;  - de uma recta e um plano;  - de rectas.  \* Analisar os vários casos de intersecção de dois e de três planos.  \* Identificar casos de paralelismo ou perpendicularidade de planos e retas.  \* Resolver problemas de perpendicularidade usando o produto escalar.  \* Resolver problemas simples de programação linear.  \* Relacionar domínios planos representados em referenciais ortonormado com condições que os definem e reciprocamente. | \* Devem propor-se aos alunos problemas variados ligados a situações concretas, que permitam recordar e aplicar métodos trigonométricos (problemas ligados a sólidos, a moldes, à navegação, à topografia, históricos,...) bem como aperceberem-se da importância da trigonometria para as várias Ciências. Os alunos devem ser solicitados a deduzir as razões trigonométricas em ,  e  radianos por se considerar que é importante que se conheçam alguns valores exatos das funções trigonométricas, nomeadamente para que mais tarde possam confirmar pontos do traçado de gráficos de funções trigonométricas. Isto não significa que se trabalhe preferencialmente com estes valores, até porque se usa a calculadora.  \* **A compreensão do círculo trigonométrico é fundamental**. A generalização das noções é intuída e sistematizada a partir de atividades que considerem movimentos circulares pretendendo-se, agora, que, ao resolver problemas, os alunos recordem os conceitos básicos de trigonometria do ângulo agudo e se enfrentem situações novas em que a generalização das noções de ângulo e arco, bem como das razões trigonométricas, apareçam como necessárias e intuíreis. Pretende-se que os alunos aprendam os conceitos de função periódica e de funções trigonométricas como modelos matemáticos adequados a responder a problemas. É necessário que se apercebam da diferença em trabalhar por exemplo com *sin* 1 em graus e radianos de modo a ter sempre presente em que modo está a calculadora e interpretar convenientemente os resultados. Recorrendo ao círculo trigonométrico as relações entre as funções circulares de , , , ,  e  aparecem naturalmente aos alunos mobilizando unicamente a compreensão dos conceitos já adquiridos. Não tem pois sentido que lhes sejam propostos exercícios rotineiros em que estas relações intervenham. Não vale a pena sequer privilegiar estes valores. Podem propor-se bons problemas que lhes permitam desenvolver a aptidão para reconhecer ou analisar  propriedades de figuras geométricas. É importante verificar que se mantêm as relações:  que devem ser usadas na determinação de uma função trigonométrica, conhecida outra.  \* Recorrendo à compreensão, sempre ligada à interpretação do círculo trigonométrico, os alunos desenvolvem a aptidão para mobilizar os conceitos já aprendidos com vista à resolução de condições simples. Assim as técnicas de resolução de equações não passam por listas exaustivas de fórmulas. As alunos desenvolvem a sua capacidade de transferir conhecimentos para novas situações (sempre ligadas à compreensão do círculo trigonométrico).  Pode ser feita uma breve referência aos gráficos das funções trigonométricas podendo utilizar-se uma atividade de movimento circular que permita, por exemplo, passar do círculo trigonométrico para os pontos (*x, sinx*) do plano cartesiano.  \* Podem propor-se algumas situações do âmbito da Física como forma de recordar e ampliar alguns aspetos do cálculo vetorial, designadamente, o trabalho de uma força. Como atividades de aplicação do conceito estudado, aparecem a determinação do ângulo de duas retas e do declive de uma reta como tangente da inclinação no caso da equação reduzida da reta no plano. Também como aplicação importante deste novo conceito, os alunos encontrarão a condição de perpendicularidade de vetores bem como novas formas de definir conjuntos seus conhecidos (no plano: mediatriz, circunferência ou reta tangente a uma circunferência num ponto dado; no espaço: plano mediador e superfície esférica). Poderá aparecer, ainda, como aplicação do conceito de produto escalar de dois vetores a dedução da fórmula do desenvolvimento de *cos (x-y).*  \* O aluno encontra a equação cartesiana de um plano como outra aplicação do mesmo conceito.  \* As equações cartesianas da reta decorrem do estudo da intersecção de planos, embora também os alunos as possam encontrar a partir da equação vetorial da reta estudada no 10º ano  Os alunos recorrem aos conhecimentos de cálculo vetorial já adquiridos para estabelecer, partindo sempre da visualização, as condições de paralelismo e perpendicularidade no espaço.  \* A programação linear vai permitir ao aluno aplicar na resolução de problemas de extrema simplicidade e utilidade (e que se apresentam hoje no domínio da Economia) conceitos aprendidos no 10º e ampliados no 11º.  Recorda-se novamente que se dá a maior ênfase à análise e interpretação de figuras quer planas quer tridimensionais pois, o aluno, para resolver problemas da vida corrente ou relacionados com áreas de engenharia, arquitetura,... precisa de usar intuição e raciocínios geométricos. Ao professor compete assegurar que, neste estudo da Geometria, o aluno não se limita à "manipulação" de condições desligadas de situações concretas, sem qualquer esforço de interpretação. A aprendizagem dos novos conceitos aparece ligada à resolução de problemas como prolongamento da geometria estudada no ano anterior (agora o aluno poderá justificar propriedades das figuras usando as suas representações em coordenadas). | \* Os alunos serão avaliados ao longo desta unidade nos termos dos Critérios de Avaliação do Departamento. | SUB  TOTAL  28  SUB  TOTAL  26  SUB  TOTAL  8  TOTAL  62 |

**Tema II – Introdução ao Cálculo diferencial I.**

**Funções racionais e com radicais. Taxa de variação e derivada.**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **CONTEÚDOS** | **COMPETÊNCIAS VISADAS** | **OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM** | **ORIENTAÇÕES METODOLÓGICAS** | **AVALIAÇÃO** | **Nº DE AULAS** |
| \* Estudo intuitivo das propriedades das funções e dos seus gráficos, tanto a partir de um gráfico particular, como usando calculadora gráfica, para a seguinte classe de funções:  -  - Funções definidas por dois ou mais ramos (cujo domínio é um intervalo ou união de intervalos).  Neste estudo enfatiza-se a análise dos efeitos das mudanças dos parâmetros nos gráficos das funções de uma mesma classe.  \* Conceito intuitivo de limite, de  e de  \* Soma, diferença, produto, quociente e composição num contexto do estudo de funções racionais envolvendo polinómios dos 2º e 3º graus.  \* Inversa de uma função. Funções com radicais quadráticos ou cúbicos.  Operações com radicais quadráticos e cúbicos e com potências de expoente fracionário.  Simplificação de ex-pressões com radicais (não incluindo a racionalização).  \* Noção de taxa média de variação: cálculo da taxa média de variação.  Noção de taxa média de variação: obtenção da taxa de variação (valor para que tende a t.m.v. quando a amplitude do intervalo tende para zero) em casos simples.  \* Interpretação geométrica da taxa de variação; definição de derivada (recorrendo à noção intuitiva de limite).  \* Determinação da derivada em casos simples: função afim, funções polinomiais dos 2º e 3º graus, função racional do 1º grau, função módulo.  \* Constatação, por argumentos geométricos, de que:  i) se a derivada é positiva num intervalo aberto a função é crescente nesse intervalo e, se a derivada é negativa num intervalo aberto a função é decrescente nesse intervalo;  ii) se a função é derivável num intervalo aberto e se tem um extremo relativo num ponto desse intervalo então a derivada é nula nesse ponto. | \* Resolver equações e inequações.  \* Interpretar fenómenos e resolver problemas recorrendo a funções e seus gráficos.  \* Usar a calculadora gráfica e tirar partido das suas potencialidades.  \* Operar com expressões racionais.  \* Conhecer personalidades e factos marcantes da História da Matemática e relacioná-los com momentos históricos de relevância cultural ou social. | \*.Interpretar gráficos de funções e determinar:  - Domínio;  - Contradomínio;  - Pontos notáveis;  - Intervalos de monotonia;  - Extremos (relativos e absolutos);  - Simetrias;  - Assimptotas;  - Limites nos ramos infinitos.  \* Identificar gráficos de funções definidas por expressões do tipo  em face da variação de *a*, *b*, *c* e *d* e concluir as características destas funções.  \* Aplicar o estudo de funções racionais à resolução de problemas.  \* Usar a calculadora gráfica para uma aproximação experimental da noção de limite,  e .  \* Definir soma, diferença, produto e quociente de funções.  \* Definir a composta de duas funções.  \* Definir a inversa de uma função.  \* Operar com radicais quadráticos e cúbicos e simplificá-los.  \* Operar com potências de expoente fracionário.  \* Estudar as propriedades de funções definidas por radicais.  \* Determinar a taxa de variação média de uma função.  \* Determinar a taxa de variação instantânea de uma função.  \* Calcular e interpretar graficamente: - Taxa de variação média;  - Taxa de variação/derivada.  \* Aplicar derivadas para concluir:  - Sentido de variação de uma função;  - Extremos.  \* Determinar a derivada de uma função num ponto.  \*Determinar a função derivada de algumas funções.  \* Interpretar e analisar gráficos de funções.  \* Resolver problemas aplicando derivadas. (Problemas de máximos e mínimos). | \* As indicações metodológicas são semelhantes às dadas no Tema II do 10º ano.  Sugerem-se as seguintes propriedades:  Domínio, contradomínio, pontos notáveis, monotonia, continuidade, extremos (relativos e absolutos), simetrias em relação ao eixo dos YY e à origem, assimptotas, limites nos ramos infinitos.  Afigura-se necessário propor problemas envolvendo as funções anteriores e as estudadas no 10º ano, tanto sob os aspetos analíticos como numéricos e gráficos. A resolução de equações e inequações fracionárias aparecem num contexto de resolução de problemas.  \* O conceito de limite, a ser formalizado mais tarde, deve ser utilizado de forma intuitiva (incluindo o de limite lateral esquerdo e direito). Neste contexto devem ser introduzidos os símbolos  e , devendo chamar-se a atenção para o facto de não serem números reais, mas apenas símbolos com um significado preciso.  Este conceito deve ser abordado de uma forma experimental.  \* Retomando os conhecimentos de polinómios, o aluno deverá ser capaz de transformar expressões como: em  ou  em  e observar que, do ponto de vista computacional, normalmente se ganha precisão, pois se efetua um número mais reduzido de operações. Por outro lado, esta simplificação permite que se estude o comportamento no infinito sem necessidade de recorrer ao gráfico. Contudo, os alunos devem efetuar este tipo de transformações e simultaneamente confirmarem pelo gráfico da função, antes de concluírem sobre o limite no infinito de uma função racional.  \* No caso da função inversa os alunos precisam de analisar os casos em que será possível inverter uma função (poderá ser introduzida a noção de injetividade, apenas como noção auxiliar) e devem constatar a relação entre os gráficos de uma função e da sua inversa. Será necessário introduzir a noção de raiz índice n. Tal deverá ser feito de forma algébrica. Só depois se falará na função inversa da função potência. Grau de dificuldade a não ultrapassar: , .  \* Uma aplicação das operações com radicais: obtenção da equação de uma elipse a partir da sua propriedade focal (dados os focos).  \* Para calcular derivadas de funções simples, não é necessário invocar questões especiais sobre limites, basta recorrer à noção intuitiva. Poderemos pensar no intervalo  ou  e na função  e  que, para , vale *m* (qualquer que seja a distância .  Do mesmo modo, se pode pensar para a derivada de outras funções. Por exemplo, para a função , a taxa média de variação no intervalo  é dada por:  que tende a ser , quando *h* tende a ser 0. Esta abordagem está sempre associada a interpretação geométrica para a taxa média de variação e para a derivada (declives de secantes e tangentes às curvas das funções).  \* Podem ser propostos alguns problemas simples que envolvam derivadas num contexto de aplicações.  \* Constate-se que quando as tangentes à curva de uma função em todos os pontos de abcissas de um intervalo aberto do seu domínio têm declives positivos (correspondente à derivada da função ser positiva em todos os pontos do intervalo aberto) a função é crescente nesse intervalo. De modo análogo para os restantes casos.  Lembre-se se opta por considerar que uma função é derivável num ponto *a* do seu domínio quando o valor da derivada é real: .  \* Não se pretende que os argumentos geométricos sejam apresentados como prova. Alguns resultados virão a ser demonstrados mais tarde.  \* Os casos  e  são bons e simples contraexemplos para que os alunos compreendam que há funções que têm derivada nula num ponto sem que nele haja extremo e que há funções com extremo que não têm derivada real no ponto em que tal acontece. | \* Os alunos serão avaliados ao longo desta unidade nos termos dos Critérios de Avaliação do Departamento. | SUB  TOTAL  30  SUB  TOTAL  18  TOTAL  48 |

**Tema III – Sucessões**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **CONTEÚDOS** | **COMPETÊNCIAS VISADAS** | **OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM** | **ORIENTAÇÕES METODOLÓGICAS** | **AVALIAÇÃO** | **Nº DE AULAS** |
| \* Sucessões:  - Definição e diferentes formas de representação.  - Estudo de propriedades: monotonia e limitação.  \* Casos particulares das progressões aritméticas e geométricas: termo geral e soma de *n* termos consecutivos.  \* Infinitamente grandes e infinitamente peque-nos. Operações com infinitamente grandes e infinitésimos.  \* Limites de sucessões e convergência.  Noção de limite real.  Ilustração de alguns resultados que justifiquem a unicidade do limite seguida da demonstração desse teorema.  \* A convergência das sucessões monótonas e limitadas.  Exemplos de sucessões monótonas não convergentes.  Exemplos de sucessões limitadas não convergentes.  Critério de majoração e teorema das sucessões enquadradas.  \* Problemas de limites com progressões.  \* Estudo intuitivo da sucessão de termo geral  num contexto de modelação matemática; primeira definição do número *e*. | \* Estudar sucessões definidas de diferentes formas.  \* Usar a calculadora gráfica tirando partindo das suas potencialidades. | \* Identificar uma sucessão.  \* Escrever termos de uma sucessão.  \* Escrever o termo geral conhecidos alguns termos.  \* Representar graficamente uma sucessão.  \* Estudar sucessões quanto:  - à monotonia;  - aos majorantes;  - aos minorantes.  \* Determinar nas progressões aritméticas e geométricas:  - a razão;  - o termo geral;  - a soma de *n* termos consecutivos.  \* Resolver problemas envolvendo progressões aritméticas e geométricas.  \* Identificar:  - Infinitamente grandes;  - Infinitamente pequenos;  - Sucessões convergentes.  \* Calcular limites de sucessões.  \* Classificar sucessões quanto à existência e natureza do limite.  \* Conhecer teoremas sobre sucessões.  \* Resolver problemas envolvendo sucessões e seus limites.  \* Calcular a soma dos termos de uma progressão geométrica, quando possível.  \* Reconhecer que .  \* Calcular limites de sucessões envolvendo o número de Neper (em casos muito simples). | \* As sucessões aparecem como uma forma de organizar possíveis resoluções para situações problemáticas que são apresentadas, com base em aspetos da realidade (social) e em aspetos do estudo das diversas ciências (Matemática incluída). O estudo das sucessões pode e deve servir para evidenciar conexões entre a Matemática e as outras disciplinas: a introdução do conceito de sucessão e das suas propriedades pode ser feita propondo vários problemas.  Exemplos sugestivos podem versar assuntos diversos: da geometria – por exemplo, comprimento da espiral construída a partir de quartos de circunferências; da economia – por exemplo, problemas com empréstimos ou depósitos bancários com juros sobre um capital constante (ou variável); da biologia – por exemplo, cálculo do número de elementos de uma população considerado um determinado modo de reprodução de cada elemento... O estudo das sucessões como funções de variável natural deve ser feito só depois de terem sido construídos vários exemplos modelo. Mas a escrita de expressões para os termos gerais das sucessões deve ser procurada como forma de representar as situações que se vão descrevendo. Do mesmo modo se podem introduzir as noções de termo, de ordem, ou até de razão, etc. O estudo da monotonia, minorantes, majorantes, etc., pode ser feito à medida que vão aparecendo como aspetos a considerar durante a resolução dos diferentes problemas. Do mesmo modo, podem ser abordadas as propriedades de certas sucessões (progressões). Estes problemas podem ainda servir para introduzir a definição por recorrência, para casos simples.  \* Os alunos podem utilizar livremente a calculadora para procurar responder aos problemas que lhes são propostos e devem procurar formas próprias de organização e expressão para a modelação das situações. O professor deve explorar o uso da calculadora e ajudar a construir tabelas, a desenhar e a interpretar gráficos. Só depois de serem experimentadas variadas redações, são introduzidas as redações simbólicas consagradas. As redações simbólicas serão testadas como exercícios rápidos.  \* Depois de se terem introduzido as noções de sucessão como função de variável natural, de ordem, de termo, etc., podem apresentar-se exemplos de sucessões definidas pelo seu termo geral e, utilizando a calculadora gráfica, através de cálculos e representações gráficas de sequências de termos, chegar aos conceitos de infinitamente grande, de infinitamente pequeno e de limite de uma sucessão. Cada definição deve ser suportada por exemplos e contraexemplos que esclareçam as ideias imediatas e corrijam eventuais conceções alternativas e erradas. É bom que os alunos utilizem conhecimentos já adquiridos sobre algumas funções reais de variável real e os transfiram com as devidas cautelas para as sucessões. É importante que se aproveitem momentos como este para obrigar os alunos a refletir (pedindo-lhes contraexemplos em que os recíprocos nem sempre são válidos).  Deste modo, os alunos ganham confiança nos seus próprios saberes e compreendem as novas aquisições como complementares e facilitadoras, aprofundamentos das suas competências para dar respostas a situações cada vez mais complexas.  \* As definições são estabelecidas em linguagem corrente seguindo as conclusões a tirar de cada exemplo e contraexemplo. Após cada redação em linguagem corrente deve ser estabelecida uma redação em simbologia matemática e devem então ser aplicados exercícios rápidos em que as definições simbólicas são testadas.  \* O aluno poderá ser solicitado a estudar, por exemplo, a curva de Von Koch ou o poliedro fractal. Os alunos encontrarão assim uma interessante característica das figuras fractais enquanto utilizam propriedades das progressões. Descobrirão que têm comprimento (ou superfície) infinito e uma superfície (ou volume) finita (quer a tratem no plano ou no espaço). | \* Os alunos serão avaliados ao longo desta unidade nos termos dos Critérios de Avaliação do Departamento. | TOTAL  22 |